

BINOMIO DI NEWTON

Copyright © 2007
Paolo Caramanica
www.paolocaramanica.net

Questa dispensa è la naturale prosecuzione di quella (già pubblicata sul sito) sul calcolo combinatorio, in quanto ne illustra una delle più note applicazioni: il calcolo della potenza di un binomio.

Coefficienti binomiali

Definizione 1: Un coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ (si legge “n su k”) è il numero di combinazioni di n elementi presi k alla volta, cioè $\binom{n}{k} = C_{n,k}$; si ha, quindi $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

Facciamo qualche esempio:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{24}{4} = 6$$
$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{(4-3)!3!} = \frac{24}{6} = 4$$

Notiamo poi che, ricordando che $0!=1$ per definizione, si ha $\binom{n}{0} = 1$. Altri casi notevoli, che si possono ricavare semplicemente applicando la definizione, sono $\binom{n}{n} = 1$ e $\binom{n}{1} = n$.

Una proprietà importante dei coefficienti binomiali è costituita dalla formula di Stifel, che enunciamo nel seguente teorema.

Teorema 1: (formula di Stifel) Dati i coefficienti binomiali $\binom{n}{k}$ e $\binom{n}{k+1}$, il coefficiente binomiale $\binom{n+1}{k+1}$ è pari alla somma dei primi due, cioè:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Dimostrazione:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k-1)!(k-1)!} =$$

ricordando che $n! = n(n-1)!$ si possono riscrivere i denominatori nel modo seguente

$$= \frac{n!}{(n-k)(n-k-1)!k!} + \frac{n!}{(n-k-1)(k+1)k!} =$$

effettuando il minimo comun denominatore

$$= \frac{n!(k+1) + n!(n-k)}{(n-k-1)!(k+1)(n-k)k!} =$$

$$= \frac{n!(n+1)}{(n-k-1)!(k+1)(n-k)k!} =$$

tenendo conto che $(k+1)k! = (k+1)!$, $(n+1)n! = (n+1)!$ e infine $(n-k)(n-k-1)! = (n-k)!$

$$= \frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!} = \binom{n+1}{k+1}$$

Se non è chiaro l'ultimo passaggio, basta osservare che $(n-k) = (n+1 - (k+1))$.

Facciamo un esempio. Supponiamo di dover calcolare $\binom{5}{3}$; possiamo procedere in modo diretto, applicando la definizione, oppure osservare che, per la formula di Stifel, si ha:

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$$

Dal momento che abbiamo già calcolato (vedi sopra) il valore degli ultimi due coefficienti binomiali, è sufficiente farne la somma:

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3} = 6 + 4 = 10$$

Teorema di Newton

Teorema 2: (teorema di Newton, o di Newton-Tartaglia, o teorema binomiale)

La potenza n-esima del binomio $(a+b)$ è pari a:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

Dimostrazione:

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)\dots(a+b)}_{n \text{ volte}}$$

Dobbiamo effettuare il prodotto di n binomi: in generale, un prodotto di polinomi è costituito da una somma di prodotti di monomi, questi ultimi ottenuti prendendo un monomio dal primo polinomio,

uno dal secondo e così via. Nel nostro caso, il prodotto degli n binomi è una somma di prodotti di n monomi, ognuno preso da ciascuno dei binomi. Poiché i binomi sono tutti uguali e sono formati dalla somma dei monomi a e b , ciascuno dei prodotti sarà di n fattori che potranno essere a oppure b . Ad esempio, prendendo il termine a da ciascun binomio, abbiamo il fattore $\underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{n \text{ volte}}$;

prendendo b nel primo binomio ed a negli altri si ha $b \underbrace{aa \dots a}_{n-1 \text{ volte}}$ e così via.

In definitiva, tali prodotti saranno del tipo:

a^n se viene scelto il termine a in tutti gli n binomi;

b^n se viene scelto il termine b in tutti gli n binomi;

in generale $a^{n-k}b^k$ se viene scelto il termine a in $n-k$ binomi e il termine b nei restanti k , essendo k compreso tra 0 ed n .

Tra tutti i prodotti che, sommati, costituiscono la potenza n -esima del binomio, quanti sono pari a $a^{n-k}b^k$?

Dobbiamo scegliere k degli n binomi da cui prelevare il termine a , ma in quanti modi si possono scegliere k elementi tra n ? Tante quante sono le combinazioni di n elementi presi k alla volta.

Quindi, in definitiva, la potenza del binomio è pari alla somma di tutti i prodotti del tipo $a^{n-k}b^k$, per k che va da 0 ad n , ciascuno preso tante volte quante sono le combinazioni semplici di n elementi presi k alla volta.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}b^n$$

Calcoliamo, ad esempio, $(a+b)^4$. Si ha:

$$\begin{aligned} (a+b)^4 &= \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4 = \\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \end{aligned}$$

Triangolo di tartaglia

In questo paragrafo vediamo un metodo per calcolare rapidamente i coefficienti binomiali che compaiono nello sviluppo della potenza n -esima di un binomio. Questo metodo, che prende il nome di triangolo (o piramide) di Tartaglia, viene generalmente introdotto nel primo anno delle scuole superiori (rientra tra i prodotti notevoli); tuttavia, in quel contesto, viene presentato solo come procedimento meccanico, senza darne la dimostrazione. Vediamo ora, invece, come si può derivare a partire dall'espressione del binomio di Newton e dalla formula di Stifel.

Consideriamo le potenze n -esime del binomio $(a+b)$ a partire da $n=0$ fino a $n=6$, consideriamone gli sviluppi nella forma di binomio di Newton e, per ciascuno di essi, riportiamo i relativi coefficienti binomiali $\binom{n}{k}$ in una struttura a triangolo come mostrato nella pagina seguente.

Ad ogni riga corrisponde un valore di n , quindi si hanno in tutto 7 righe.

