

CALCOLO COMBINATORIO

Copyright © 2007
Paolo Caramanica
www.paolocaramanica.net

Argomenti preliminari

Prima di trattare il calcolo combinatorio, richiamiamo qualche concetto di teoria degli insiemi ed introduciamo il concetto di fattoriale.

Per quanto riguarda la teoria degli insiemi, è opportuno sottolineare la differenza tra **insieme non ordinato** e **insieme ordinato** (di cui faremo ampio uso in seguito); ci limitiamo inoltre a considerare gli insiemi con un numero finito di elementi.

Un insieme non ordinato (chiamato anche semplicemente insieme) si può identificare indicando gli elementi che contiene tra parentesi graffe, in qualunque ordine; in altre parole, due insiemi che contengono gli stessi elementi, ma in ordine diverso, sono uguali. Gli elementi di un insieme ordinato, invece, vengono indicati tra parentesi tonde e l'ordine con cui vengono scritti è importante.

Ad esempio:

$$A = \{1, 2, 4, 6, 7\}$$

$$B = \{2, 6, 7, 4, 1\}$$

I due insiemi (non ordinati) A e B sono uguali, perché contengono gli stessi elementi, anche se in ordine diverso.

$$C = (1, 6, 9)$$

$$D = (6, 9, 1)$$

I due insiemi ordinati C e D sono diversi, in quanto, pur contenendo gli stessi elementi, questi ultimi appaiono in ordine diverso.

Inoltre, in alcuni casi può essere utile considerare insiemi (sia ordinati che non) che contengono elementi ripetuti, cioè più "copie" dello stesso elemento¹.

Passiamo adesso ad introdurre il concetto di **fattoriale**.

Dato n intero e positivo, si chiama "n fattoriale" e si indica con $n!$ il prodotto di n per tutti gli interi positivi che lo precedono, cioè

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Si pone poi, per definizione (e per comodità), $1! = 1$ e $0! = 1$.

¹ APPROFONDIMENTO:

Dal momento che un insieme ordinato di n elementi (con n finito) viene definito a partire dal prodotto cartesiano di n insiemi, alcuni dei quali (o anche tutti) possono essere uguali, la presenza di elementi ripetuti in tale insieme ordinato non crea alcun problema concettuale (due elementi uguali sono distinguibili in quanto occupano due posizioni diverse). Ammettere la presenza di elementi ripetuti in insiemi non ordinati, invece, provoca alcuni problemi teorici, su cui però non entriamo.

Solo per darne un'idea, a titolo di esempio, consideriamo la definizione di uguaglianza tra due insiemi A e B:

$$A = B \Leftrightarrow \forall a \in A \exists b \in B \text{ t.c. } a = b \text{ e } \forall b \in B \exists a \in A \text{ t.c. } a = b$$

Sulla base di tale definizione, gli insiemi $\{1, 3, 4\}$ e $\{1, 3, 3, 3, 4\}$ sarebbero uguali!

Ad esempio:

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Introduzione

Allo scopo di capire che cos'è il calcolo combinatorio e a cosa serve, prima di trattarlo in modo generale, esaminiamo tre semplici esempi.

Primo caso: Consideriamo una scatola contenente 4 palline di colore diverso (supponiamo GIALLO, ROSSO, VERDE e AZZURRO): se ne estraiamo a caso due, quante sono le possibili coppie ordinate² di colori che possiamo ottenere? Possiamo, ad esempio ottenere la prima pallina GIALLA e la seconda ROSSA, oppure la prima AZZURRA e la seconda VERDE, o ancora la prima ROSSA e la seconda VERDE... ma in tutto quante sono le possibili coppie ordinate? Riportiamo l'insieme dei possibili risultati in una tabella.

N.	Prima pallina	Seconda pallina
1	GIALLO	ROSSO
2	GIALLO	VERDE
3	GIALLO	AZZURRO
4	ROSSO	GIALLO
5	ROSSO	VERDE
6	ROSSO	AZZURRO
7	VERDE	GIALLO
8	VERDE	ROSSO
9	VERDE	AZZURRO
10	AZZURRO	GIALLO
11	AZZURRO	ROSSO
12	AZZURRO	VERDE

Dalla tabella si vede che si possono avere 12 possibili coppie ordinate di colori.

Secondo caso: Nel caso in cui, invece delle coppie ordinate, si vogliono considerare le coppie di colori, senza tenere conto dell'ordine, se ne hanno in tutto 6 (in questo caso, ad esempio, la prima coppia, GIALLO e ROSSO, è considerata uguale alla quarta, ROSSO e GIALLO, la seconda alla settima, ecc...).

Terzo caso: Consideriamo ora una situazione leggermente diversa. Immaginiamo ancora di avere una scatola con quattro palline colorate (le stesse di prima): anziché estrarre due palline di seguito, ne estraiamo una, annotiamo il colore e, prima di effettuare la seconda estrazione, rimettiamo nella scatola la prima pallina. In tal caso può accadere di estrarre tutte e due le volte la stessa pallina, quindi si possono avere coppie di colori uguali (ad esempio GIALLO e GIALLO). Quante sono in questo caso le possibili coppie ordinate? E quelle non ordinate? Riportando l'insieme dei possibili risultati in una tabella come quella di prima, in tal caso si ottiene che le coppie ordinate possibili sono 16, mentre le coppie non ordinate sono 10.

Il calcolo combinatorio ci consente di risolvere problemi di questo tipo.

² Una coppia è un insieme contenente due elementi; una coppia ordinata è un insieme ordinato contenente due elementi.

In generale, dati N elementi di qualunque natura, volendo con questi formare degli insiemi di K oggetti ciascuno, secondo una data regola, il calcolo combinatorio consente di stabilire quanti di questi insiemi si possono avere.

Disposizioni semplici

Definizione 1: Una disposizione semplice di N elementi presi K alla volta, essendo $K \leq N$, è un insieme ordinato di k elementi, tra gli N dati, in cui **non compaiono elementi ripetuti**.

Per esempio, dato l'insieme $\{a, b, c, d, e, f\}$ di 6 elementi, due possibili disposizioni semplici di questi 6 elementi presi 3 alla volta sono (a, c, d) e (b, c, e) ; un'altra disposizione dello stesso tipo è (a, d, c) : si noti che quest'ultima è diversa dalla disposizione (a, c, d) , in quanto cambia l'ordine con cui i 3 elementi compaiono.

(b, b, d) , invece, **non è una disposizione semplice** di 6 elementi presi 3 alla volta, in quanto c'è l'elemento b che compare due volte.

Vediamo ora di capire quante disposizioni semplici si possono costruire con 6 elementi presi 3 alla volta. Immaginiamo, dunque, di avere tre caselle vuote da riempire ciascuna con uno dei 6 elementi dati: l'elemento che andrà nella prima casella si può scegliere in 6 modi diversi, poiché 6 sono gli oggetti di cui disponiamo; una volta scelto l'elemento che va nella prima casella, quello che va nella seconda può essere scelto tra soli 5 oggetti, cioè tutti quelli dati, tranne quello che abbiamo messo al primo posto, che non possiamo più usare dal momento che, per definizione, non ci possono essere elementi ripetuti; l'elemento al terzo posto si può scegliere tra 4, cioè tra tutti quelli dati, tranne i due che abbiamo messo nelle prime due caselle. I modi di riempire queste 3 caselle sono quindi $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$; detto in altri termini, per riempire il primo posto possiamo compiere 6 scelte, per ognuna di esse abbiamo 5 scelte per riempire il secondo e per ognuna di queste ne abbiamo 4 per il terzo.

Il ragionamento fatto per $N=6$ e $k=3$ si può ripetere per qualunque valore di N e K e in generale si può dimostrare il seguente teorema.

Teorema 1: Il numero di disposizioni semplici di N elementi presi K alla volta, che si indica con il simbolo $D_{N,K}$, è dato da:

$$D_{N,K} = N(N-1)(N-2)\dots(N-K+1)$$

Riportiamo qualche esempio:

$$D_{8,3} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

$$D_{5,4} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$$

$$D_{3,2} = 3$$

Riprendendo il primo caso esaminato nell'introduzione (numero di coppie ordinate che si possono formare con quattro palline diverse, nelle quali ogni pallina non compare più di una volta), ci rendiamo facilmente conto che questo numero di coppie è proprio il numero di disposizioni semplici di 4 elementi presi 2 alla volta; infatti

$$D_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12$$

è proprio il risultato ottenuto prima con l'aiuto della tabella.

Permutazioni

Definizione 2: Una permutazione di N elementi è un **insieme ordinato** contenente tutti gli N oggetti dati, in cui **non compaiono elementi ripetuti**.

Per esempio, dato l'insieme $\{a, b, c\}$, alcuni esempi di permutazioni sono (a, c, b) , (c, b, a) , (b, a, c) . Anche (a, b, c) è una possibile permutazione.

Vediamo ora di capire quante permutazioni si possono ottenere con N elementi: tutte le permutazioni si ottengono mettendo gli N oggetti in ordine in tutti i modi possibili. Facendo un ragionamento analogo a quello fatto per le disposizioni semplici, possiamo immaginare di avere N caselle vuote, da riempire ciascuna con uno degli N oggetti dati. Per la prima casella possiamo scegliere tra tutti gli N oggetti; per la seconda casella, invece, possiamo scegliere tra tutti meno uno (quello messo al primo posto) poiché non possono esserci elementi ripetuti. Analogamente, per la terza casella possiamo scegliere tra $(N-2)$ elementi e così via. Quando arriviamo alla penultima casella, ci restano solo due elementi tra cui effettuare la scelta ed infine, per l'ultimo posto la scelta è obbligata (dobbiamo metterci l'unico elemento avanzato). In definitiva, per il primo posto abbiamo N scelte, per ognuna di esse si hanno $N-1$ scelte per la seconda posizione, per ognuna di queste ultime $N-2$ scelte per la terza posizione e così via. Il numero totale di scelte possibili sono quindi $N(N-1)(N-2)\dots 3\cdot 2\cdot 1$.

Ricordando la definizione di fattoriale data nel primo paragrafo, possiamo enunciare il seguente teorema.

Teorema 2: Il numero delle permutazioni di N oggetti, che si indica con il simbolo P_N , è dato da:

$$P_N = N!$$

Riportiamo qualche esempio:

$$P_5 = 5! = 120$$

$$P_3 = 3! = 6$$

$$P_4 = 4! = 24$$

Osserviamo infine che una permutazione di N elementi non è altro che una disposizione degli N elementi presi N alla volta, cioè:

$$P_N = D_{N,N}$$

Combinazioni semplici

Definizione 3: Una combinazione semplice di N elementi presi K alla volta, essendo $K \leq N$, è un **insieme non ordinato** contenente K degli N oggetti, in cui **non compaiono elementi ripetuti**.

Dato, ad esempio, l'insieme $\{a, b, c, d\}$, una possibile combinazione di questi 4 elementi presi 3 alla volta è $\{a, b, c\}$; è da notare che stavolta l'insieme è non ordinato (infatti abbiamo usato le parentesi graffe invece delle tonde) e quindi $\{b, c, a\}$ rappresenta la stessa combinazione, come $\{a, c, b\}$, $\{b, a, c\}$, ecc...

Per quanto riguarda il numero di combinazioni formabili con N elementi presi K alla volta, vale il seguente teorema, di cui, per brevità, tralasciamo la dimostrazione.

Teorema 3: Il numero di combinazioni di N oggetti presi K alla volta, che si indica con $C_{N,K}$, è dato da:

$$C_{N,K} = \frac{N!}{(N-K)!K!}$$

Facciamo un paio di esempi:

$$C_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{6}{1 \cdot 2} = 3$$
$$C_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!2!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10$$

Nel secondo caso presentato nell'introduzione, non abbiamo fatto altro che calcolare il numero di combinazioni di 4 elementi (le 4 palline colorate) presi 2 alla volta.

Disposizioni con ripetizione

Definizione 4: Dati N elementi, una disposizione con ripetizione di questi presi K alla volta è un **insieme ordinato** contenente K tra gli N oggetti, in cui **possono comparire anche elementi ripetuti**.

Dato, ad esempio, $\{a, b, c\}$, una disposizione con ripetizione di questi 3 elementi presi 2 alla volta è (a, a) ; anche (a, b) è una disposizione con ripetizione, infatti, nella definizione si dice che possono comparire elementi ripetuti, non che debbono per forza esserci; (a, b) è una disposizione con ripetizione ed inoltre è anche una disposizione semplice. In generale una disposizione semplice di N elementi presi K alla volta è anche una disposizione con ripetizione (sempre di N elementi presi K alla volta); è un po' come dire che un triangolo equilatero è anche isoscele.

Per quanto riguarda il numero delle disposizioni con ripetizione che si possono formare con N elementi presi K alla volta, vale il seguente teorema, di cui, per brevità, non riportiamo la dimostrazione.

Teorema 4: Il numero delle disposizioni con ripetizioni che si possono formare con N elementi presi K alla volta è pari a N^K .

Facciamo un'ultima osservazione. Nella definizione di disposizione semplice e di combinazione semplice di N elementi presi K alla volta, abbiamo precisato che K deve essere minore o uguale ad N . Per renderci conto della necessità di questa precisazione, riprendiamo il ragionamento fatto prima per capire quante disposizioni semplici si potessero fare con 6 elementi presi 3 alla volta. Consideriamo le tre caselle da riempire: nella prima possiamo mettere uno qualunque tra i 6 oggetti, nella seconda uno qualunque tra 5 e nella terza uno qualunque tra 4. E se cercassimo di costruire una disposizione semplice di 6 elementi presi 7 alla volta? Questa volta abbiamo 7 caselle vuote: nella prima possiamo mettere un oggetto scelto tra 6, nella seconda un oggetto scelto tra 5 e così via; quando arriviamo alla sesta casella, ci avanza un solo oggetto, quindi la scelta è obbligata... ma nella settima casella che cosa mettiamo? Non ci resta più nessun elemento, poiché li abbiamo usati tutti e non possiamo usarne uno di essi più volte (perché per definizione non ci possono essere elementi ripetuti). Di conseguenza si capisce che è impossibile costruire una disposizione semplice di 6 elementi presi 7 alla volta e, in generale, di N elementi presi K alla volta con K maggiore di N . Con un ragionamento analogo si capisce che la stessa cosa vale per le combinazioni semplici.

Nelle disposizioni con ripetizione, invece, il problema non si pone, quindi nella definizione non c'è la condizione $K \leq N$.

Dato, ad esempio l'insieme $\{a, b, c\}$, una disposizione con ripetizione di 5 dei 3 elementi dell'insieme è ad esempio (b, b, b, a, c) ; una disposizione semplice di 5 elementi presi dai 3 oggetti dell'insieme invece non esiste.

Combinazioni con ripetizione

Solo per dovere di cronaca, riportiamo anche il caso di combinazioni con ripetizione, anche se raramente ricorre nei casi pratici.

Definizione 5: Una combinazione con ripetizione di N elementi presi K alla volta è **un insieme non ordinato** di K elementi presi tra gli N dati, in cui **possono comparire elementi ripetuti**.

Teorema 5: Il numero di combinazioni con ripetizione che si possono formare con N elementi presi K alla volta è pari a:

$$\frac{N(N+1)(N+2)\dots(N+K-1)}{K!}$$

Un caso di combinazioni con ripetizione è stato incontrato nel terzo esempio presentato nell'introduzione, dove ci chiedevamo quante fossero le coppie non ordinate di palline.

Esercizi di riepilogo

Esercizio 1: Nei primi anni '90 giocare una colonna al Totocalcio³ costava 800 lire. Quanto avrebbe dovuto spendere un tizio se avesse voluto avere la certezza matematica di fare 13?

Soluzione: Il tizio avrebbe dovuto giocare tutte le possibili colonne, quindi bisogna calcolare quante colonne diverse si possono giocare: Una colonna non è altro che una sequenza di 13 segni (1, X e

³ Si fa riferimento al Totocalcio "vecchia maniera" in cui venivano date 13 partite e si doveva, per ciascuna di essa, indovinare il risultato (1, X oppure 2).

2): tale sequenza è ordinata (il primo segno si riferisce alla prima partita, il secondo alla seconda e così via) ed inoltre uno stesso segno può comparire più volte (o anche nessuna volta) nella colonna. In definitiva una colonna è una disposizione con ripetizione di tre elementi (1, X e 2) presi 13 alla volta (le 13 partite), quindi il numero totale di colonne N è:

$$N = 3^{13} = 1594323$$

Moltiplicando N per il costo di una colonna si ottiene la spesa totale:

$$Spesa = N \cdot 800 \text{ lire} = 1275458400$$

Esercizio 2: Quante sono le possibili colonne che possono essere giocate al Superenalotto?

Soluzione: Una colonna in tal caso è un insieme non ordinato di 6 numeri (diversi) compresi tra 1 e 90. Basta quindi calcolare il numero di combinazioni di 90 elementi presi 6 alla volta. Applicando la formula si ha:

$$C_{90,6} = \frac{90!}{(90-6)!6!} = 622614630$$