

## INDUZIONE MATEMATICA

Copyright © 2008  
Paolo Caramanica  
[www.paolocaramanica.net](http://www.paolocaramanica.net)

La **dimostrazione per induzione**, detta anche **ragionamento per ricorrenza**, è un metodo di dimostrazione molto efficace in alcuni casi, in particolare quando si devono provare teoremi il cui enunciato dipende da un numero intero positivo  $n$  e lo si deve provare per tutti gli  $n$  (da 1 ad infinito).

Prima di descrivere il procedimento generale, facciamo un semplice esempio: cerchiamo di dimostrare che, per ogni  $n$  intero e positivo, il numero  $10^n - 1$  è divisibile per 9.

Per  $n = 1$  si ha  $10^1 - 1 = 9$ , che è divisibile per 9.

Per  $n = 2$  si ha  $10^2 - 1 = 99$ , che è divisibile per 9.

Per  $n = 3$  si ha  $10^3 - 1 = 999$ , che è ancora divisibile per 9.

Abbiamo dimostrato il teorema per i primi tre numeri interi positivi (1, 2 e 3), ma non per tutti i numeri interi positivi: per raggiungere questo scopo, dovremmo ripetere il ragionamento, fatto per  $n$  pari a 1, 2 e 3, anche per  $n$  pari a 4, 5, 6, ecc... cioè per un numero infinito di casi! E' evidente che bisogna trovare un'altra strada.

Supponiamo ora di aver dimostrato il teorema per  $n = 1$ : se riusciamo a dimostrare che l'essere il teorema vero per  $n = k$  comporta che il teorema è vero anche per  $n = k + 1$  (**con  $k$  generico**) possiamo concludere che il teorema è vero per tutti i numeri interi positivi. Infatti, se è vero per  $n = 1$  e l'essere vero per un numero comporta l'essere vero anche per il successivo, il teorema è vero anche per  $n = 2$ , ma, poiché ancora l'essere vero per un numero comporta l'essere vero per il successivo, allora è vero anche per  $n = 3$  (successivo di 2) e così via ...

Torniamo al nostro esempio e cerchiamo di applicare quanto detto. Abbiamo già dimostrato che il teorema è vero per  $n = 1$ ; bisogna ora dimostrare che, se il teorema è vero per  $n = k$ , allora è vero anche per  $n = k + 1$ .

Supponiamo quindi (ipotesi) che  $10^k - 1$  sia divisibile per 9 e dimostriamo che anche  $10^{k+1} - 1$  è divisibile per 9 (tesi). Si ha:

$$\begin{aligned} 10^{k+1} - 1 &= \\ &= 10^{k+1} - 1 + 10 - 10 = \\ &= (10^{k+1} - 10) + (10 - 1) = \\ &= 10 \cdot (10^k - 1) + 9 = \end{aligned}$$

$10^k - 1$  è divisibile per 9 per ipotesi, quindi si può scrivere come prodotto di 9 per un numero intero (che chiamiamo  $m$ ):

$$\begin{aligned} &= 10 \cdot 9 \cdot m + 9 = \\ &= 9 \cdot (10m + 1) \end{aligned}$$

che è divisibile per 9.

Per il ragionamento fatto prima, possiamo concludere che il teorema è vero per tutti gli interi positivi.

Descriviamo ora il procedimento generale, che prende il nome di **principio di induzione completa** o **principio di induzione matematica**.

**Principio di induzione completa:** Dato un teorema il cui enunciato dipende da un numero intero e positivo  $n$ , per dimostrarne la validità per tutti gli  $n$  interi e positivi è necessario e sufficiente:

1. Dimostrare il teorema per  $n = 1$ ;
2. Dimostrare che, se il teorema è vero per un  $n$  generico (ipotesi induttiva) allora è vero anche per  $n + 1$ .

Facciamo un altro esempio: dimostriamo che la somma dei primi  $n$  numeri interi e positivi è pari a  $\frac{n(n+1)}{2}$  per ogni  $n$  intero e positivo, cioè

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Per  $n = 1$  il teorema è sicuramente vero, infatti  $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ .

Supponiamo vero il teorema per  $n$  generico e dimostriamo che, sotto tale ipotesi (induttiva) lo è anche per  $n + 1$ . L'ipotesi induttiva comporta che

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

La somma dei primi  $n + 1$  numeri interi e positivi si può scrivere come segue:

$$\begin{aligned} & 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1) = \\ & = (1 + 2 + 3 + \dots + n) + (n + 1) = \end{aligned}$$

applicando l'ipotesi induttiva

$$\begin{aligned} & = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \\ & = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

che non è altro che la formula che volevamo dimostrare scritta nel caso di  $n + 1$ .

Nel prossimo esempio applicheremo il principio di induzione per dimostrare un teorema dell'analisi matematica<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Per comprendere questo esempio, è necessario avere familiarità con il concetto di derivata, che normalmente si studia negli ultimi anni delle scuole superiori.

Dimostriamo che la derivata di  $x^n$  è uguale a  $nx^{n-1}$  per tutti gli  $n$  interi e positivi (questo teorema, solitamente, si dimostra senza ricorrere all'induzione ed usando la formula del binomio di Newton).

Applicando direttamente la definizione di derivata, possiamo immediatamente verificare che il teorema è vero per la funzione  $y = x$ :

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = 1 = 1x^0$$

Supponiamo ora che il teorema sia vero nel caso in cui  $y = x^n$ , cioè che  $y' = nx^{n-1}$ , e dimostriamo che lo è anche per la funzione  $z = x^{n+1}$ .

Osserviamo innanzitutto che la funzione  $z$  si può scrivere  $z = x \cdot x^n$  e calcoliamone la derivata utilizzando la regola di derivazione del prodotto:

$$\begin{aligned} z' &= x \cdot nx^{n-1} + 1 \cdot x^n = \\ &= nx^n + x^n = \\ &= (n + 1)x^n \end{aligned}$$

(nel primo passaggio abbiamo sfruttato l'ipotesi induttiva per calcolare la derivata di  $x^n$ ).

Finora abbiamo considerato solo teoremi (il cui enunciato dipende da un numero intero e positivo) veri per tutti i numeri da 1 ad infinito. Esistono tuttavia delle proposizioni (dipendenti da un intero) che non sono vere per tutti i numeri, ma solo da un certo numero in poi. Finora, cioè, ci siamo occupati di problemi del tipo: “dimostrare che per ogni numero intero e positivo vale la formula ...”; possiamo tuttavia avere a che fare con problemi di tipo leggermente diverso, ad esempio: “dimostrare che per ogni numero intero maggiore o uguale a 6 vale la formula ...). Il primo tipo di enunciato non è altro che un caso particolare del secondo, in quanto l'espressione “dimostrare che per ogni numero intero e positivo ...” si può scrivere, senza che cambi significato, “dimostrare che per ogni numero intero maggiore o uguale ad 1 ...”.

Per dimostrare enunciati del secondo tipo, si può ancora usare il principio di induzione, pur di apportarvi qualche piccola modifica, che conduce al seguente principio di induzione generalizzato.

**Principio di induzione completa generalizzato:** Dato un teorema il cui enunciato dipende da un numero intero e positivo  $n$ , per dimostrarne la validità per tutti gli  $n$  interi e positivi maggiori o uguali di  $n_0$  è necessario e sufficiente:

1. Dimostrare il teorema per  $n = n_0$ ;
2. Dimostrare che, se il teorema è vero per un  $n > n_0$  generico (ipotesi induttiva) allora è vero anche per  $n + 1$ .

Facciamo un esempio: dimostriamo che per ogni numero intero  $n \geq 3$  si ha  $n^2 > n + 3$ .

Bisogna dapprima dimostrare che il teorema è vero per  $n = 3$  e, a questo scopo, basta sostituire 3 nelle espressioni a primo e secondo membro e controllare che la disuguaglianza sia verificata; si ha:

$$n^2 = 3^2 = 9$$

e

$$n + 3 = 3 + 3 = 6$$

evidentemente  $9 > 6$ , quindi la disuguaglianza è verificata.

Supponiamo ora (ipotesi induttiva) che la disuguaglianza sia verificata per  $n$  generico e dimostriamo che lo è anche per  $n + 1$  (dobbiamo cioè dimostrare che  $(n + 1)^2 > (n + 1) + 3$ ).  
Si ha:

$$(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

e

$$(n + 1) + 3 = (n + 3) + 1$$

Tenendo conto che  $n^2 > n + 3$  (ipotesi induttiva) e che certamente, per  $n > 3$ , è  $2n + 1 > 1$ , sommando queste due disuguaglianze membro a membro si ha:

$$n^2 + 2n + 1 > (n + 3) + 1$$

che, tenendo conto delle relazioni scritte prima, è proprio

$$(n + 1)^2 > (n + 1) + 3$$

cioè quanto volevamo dimostrare.