# MATRICI: CALCOLO DEL DETERMINANTE E DEL RANGO



SISTEMI LINEARI

QUARTA PARTE

Paolo Caramanica
(www.paolocaramanica.net)

## SISTEMI LINEARI

Si chiama <u>sistema lineare di m equazioni in n incognite</u> un insieme di m equazioni, in cui compaiono n incognite, che chiamiamo $x_1, x_2, \dots x_n$, lineari (in cui, cioè, le incognite non compaiono elevate a potenza). Un sistema lineare (di m equazioni in n incognite) si può sempre scrivere nel seguente modo, che prende il nome di <u>forma normale</u>:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$a_{ij}$ e $b_k$
$(i=1 \cdots m;\ j=1 \cdots n;\ k=1 \cdots m)$
sono dei numeri

Diamo subito qualche definizione:
La matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

si chiama <u>matrice dei coefficienti</u>;

il vettore $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ si chiama <u>vettore dei termini noti</u>

La matrice

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

ottenuta affiancando alla matrice dei coefficienti il vettore dei termini noti, si chiama <u>matrice completa</u>.

Risolvere il sistema significa trovare n valori tali che, assegnati alle n incognite $x_1, x_2, \dots x_n$, rendono verificate tutte le m equazioni.

Questi n valori costituiscono una <u>soluzione del sistema</u>.
Un sistema lineare può ammettere nessuna, una oppure infinite soluzioni: un sistema che non ammette alcuna soluzione è detto <u>incompatibile</u>; un sistema che ne ammette almeno una è detto, invece, <u>compatibile</u>. Inoltre, un sistema compatibile che ammette una ed una sola soluzione si dice <u>determinato</u>; uno che ne ammette infinite si dice <u>indeterminato</u>.
Quando si deve risolvere un sistema lineare, la prima cosa da fare è stabilire se sia compatibile; in caso affermativo, si debbono poi trovare le soluzioni (o la soluzione). Tutto ciò sarà illustrato nei paragrafi ~~per~~ successivi.

## Stabilire se un sistema è compatibile:

Per stabilire se un sistema è compatibile, dopo averlo scritto, per comodità, in forma normale, si applica il teorema di Rouché-Capelli, che presentiamo omettendone la dimostrazione.

<u>Teorema di Rouché-Capelli</u>: Un sistema lineare è compatibile se e solo se il rango della matrice dei coefficienti è uguale al rango della matrice completa.
Con riferimento ai simboli introdotti nella pagina precedente, il sistema è compatibile se e solo se $rg(A) = rg(C)$.

Vediamo qualche esempio:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 4x_3 = x_2 \\ x_2 - 1 = x_3 \end{cases}$$

La prima cosa da fare è portare il sistema in forma normale: con l'usuale regola del trasporto, si portano i termini con le incognite a primo membro e i termini noti a secondo membro (per ciascuna equazione) badando a far comparire le incognite nello stesso ordine (per comodità da $x_1$ a $x_n$) in tutte le equazioni.
Nel nostro caso abbiamo:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 \\ 0 \cdot x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Il termine $0 \cdot x_1$ nella terza equazione, ovviamente, è superfluo, ma indicarlo può far evitare di commettere errori nello scrivere la matrice dei coefficienti.

La matrice dei coefficienti è

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, mentre quella completa è $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Calcoliamo il rango di A:

$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1 \neq 0$ è un minore del 2° ordine non nullo;

orlandolo con 3ª riga e 3ª colonna si ha:

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 4 - 2 = 4 \neq 0$, quindi $rg(A) = 3$

Per quanto riguarda il rango di C, e ciò vale in generale, poiché A è "contenuta" in C, tutti i suoi minori sono anche minori di C, quindi è facile rendersi conto che $rg(C)$ non può mai essere ~~minore~~ più piccolo di $rg(A)$.

Nel nostro caso, poiché $rg(A) = 3$ e da C non si possono estrarre minori di ordine superiore a 3, allora $rg(C) = 3$.

Essendo $rg(C) = rg(A)$, il sistema è compatibile e quindi ammette almeno una soluzione; quante soluzioni ammette e come si trovano lo vedremo più avanti.

Altro esempio:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$ (in tal caso è già ridotto in forma normale)

$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ matrice dei coefficienti $\qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrice completa

Rango di A:

$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 12 = 11 \neq 0$

orlandolo con 3ª riga e 3ª colonna

$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 9 - 2 + 12 = 0$, quindi $rg(A) = 2$

Rango di C:

orlando $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$ con 3ª riga e 4ª colonna si ha:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 11 \neq 0 \quad \text{quindi } rg(C) = 3$$

Poiché $rg(A) \neq rg(C)$ il sistema non è compatibile, cioè non ammette alcuna soluzione.

Una volta appurato che un sistema è compatibile, bisogna stabilire quante soluzioni ammette e, infine, trovarle.

Vale la seguente proprietà: dato un sistema lineare con $n$ incognite, compatibile, con matrice dei coefficienti $A$,

- se $rg(A) = n$ il sistema ammette una ed una sola soluzione;
- se $rg(A) < n$ il sistema ammette infinite soluzioni.

($rg(A)$ non può mai essere superiore ad $n$ poiché la matrice $A$ ha $n$ colonne).

Nei due paragrafi successivi esamineremo questi due casi.

## Sistemi compatibili con una sola soluzione

In questo caso, detto (al solito) $n$ il numero delle incognite, le equazioni possono essere $n$ o più di $n$.

Se le equazioni sono $n$, si applica la regola di Cramer: il valore di $x_i$ è dato dal rapporto tra il determinante della matrice ottenuta sostituendo, nella matrice dei coefficienti, la colonna i-esima con il vettore dei termini noti e il determinante della matrice dei coefficienti.

È più facile a farsi che a dirsi, quindi vediamo subito un esempio:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \qquad \text{quindi} \quad rg(A) = rg(C) = 3$$

Il sistema è compatibile (essendo $rg(A) = 3$) ed ammette una sola soluzione (essendo $rg(A)$ pari al numero delle incognite, cioè 3).

Per trovare i valori di $x_1$, $x_2$ e $x_3$ che costituiscono la soluzione, applichiamo la regola di Cramer:

Cominciamo a calcolare $x_1$: questo è dato dal rapporto tra due determinanti

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}} =$$

a numeratore c'è il determinante della matrice ottenuta dalla A mettendo al posto della prima colonna il vettore B dei termini noti

a denominatore c'è il determinante della matrice dei coefficienti A

$$= \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Per quanto riguarda $x_2$ abbiamo:

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3}{4}$$

dal momento che stiamo calcolando $x_2$, il vettore dei termini noti stavolta lo mettiamo al posto della seconda colonna

a denominatore c'è sempre il determinante della matrice A.

Per $x_3$, infine, si ha:

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3}{4}$$

il vettore dei termini noti stavolta va al posto della terza colonna.

determinante di A (come sopra)

La soluzione del sistema è, quindi: $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{3}{4}$, $x_3 = \frac{3}{4}$.

Se le equazioni sono più di $n$, si procede come segue: si evidenzia, nella matrice A, che sarà $m \times n$, un minore non nullo di ordine $n$ e si eliminano dal sistema le equazioni i cui coefficienti non fanno parte del minore; le equazioni da eliminare sono in tutto $m-n$. Quello che resta è un sistema di $n$ equazioni in $n$ incognite e si può risolvere con la regola di Cramer vista sopra.

Esempio:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = -1 \\ 3x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + 5x_2 = 2 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Rango di A:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 4 & 5 \end{matrix} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -11 \quad \text{quindi} \quad rg(A) = 2$$

Rango di C:
orlando il minore $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ con terza riga e terza colonna, si ha

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & -4 \end{vmatrix} = 0 \quad , \text{quindi} \quad rg(C) = 2$$

Essendo $rg(A) = rg(C) = 2$, il sistema è compatibile: essendo poi $rg(A) = 2$ pari al numero delle incognite, il sistema ammette una sola soluzione.

Evidenziando un minore di ordine 2 non nullo nella matrice A,

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 4 & 5 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

la riga che non contribuisce al minore è la terza, quindi si elimina la terza equazione dal sistema.

Il sistema rimanente è di due equazioni in due incognite

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = -1 \\ 3x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

Questo è equivalente al sistema di partenza (cioè ammette la stessa soluzione) e si può risolvere con il metodo di Cramer:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-13}{-11} = \frac{13}{11} \quad ; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{6}{-11} = -\frac{6}{11}$$

La soluzione del sistema è, quindi: $x_1 = \frac{13}{11}$, $x_2 = -\frac{6}{11}$

Altro esempio:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 2 \\ -6x_1 + 2x_2 = -4 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \\ 5x_1 = 2 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \\ 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Rango di A: da 1ª e 3ª riga e 1ª e 2ª colonna si ha il minore di ordine 2 $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$

quindi $rg(A) = 2$

Rango di C:

$$C = \begin{pmatrix} \boxed{3 \quad -1} & 2 \\ -6 & 2 & -4 \\ \boxed{2 \quad 1} & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

orlando il minore $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ con 2ª riga e 3ª colonna e poi con 4ª riga e 3ª colonna si hanno i due minori di ordine 3

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$ (prima e seconda riga sono proporzionali)

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$ (terza riga somma delle prime due)

di conseguenza $rg(C) = 2 = rg(A)$ e il sistema è compatibile; essendo poi il sistema in due incognite ed essendo $rg(A) = 2$, esso ammette una sola soluzione. Dal momento, però, che le equazioni sono 4, prima di applicare il metodo di Cramer si devono eliminare dal sistema 2 equazioni: per farlo, evidenziamo nella matrice A un minore di ordine 2 diverso da zero, ad esempio lo stesso trovato prima, ed osserviamo che le righe

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{3 \quad -1} \\ -6 \quad 2 \\ \boxed{2 \quad 1} \\ 5 \quad 0 \end{pmatrix}$$

della matrice che non intervengono nel formare il minore sono la 2ª e la 4ª, pertanto dal sistema eliminiamo 2ª e 4ª equazione.

Il sistema risultante è

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

che si risolve facilmente con il metodo di Cramer.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2}{5} \quad ; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{4}{5}$$

La soluzione è $x_1 = \frac{2}{5}$ e $x_2 = -\frac{4}{5}$

## Sistemi compatibili indeterminati

Prima di vedere come si procede nel caso si abbia un sistema indeterminato, è opportuno fare un'osservazione.
Dato un sistema lineare di $m$ equazioni in $n$ incognite, dire che esso è indeterminato significa dire che esistono infinite $n$-ple[1] di valori che sono soluzione del sistema, ma non che qualunque $n$-pla è soluzione.
Per chiarire ulteriormente questo concetto, consideriamo una semplice equazione in due incognite indeterminata:

$$-3x + y = 0$$

Si vede subito che alcune possibili soluzioni sono $x=0$ e $y=0$, $x=1$ e $y=3$, $x=-2$ e $y=-6$, ...
Portando il termine $-3x$ al secondo membro, si ha $y=3x$ e si vede che, in generale, tutte le coppie ordinate di valori di cui il secondo è pari al primo moltiplicato per 3, sostituite (ordinatamente) a $x$ e $y$ verificano l'equazione.
Queste coppie, come è facile rendersi conto, sono infinite, ma ciò, evidentemente, non significa che qualunque coppia di numeri è soluzione dell'equazione ($x=2$ e $y=2$, ad esempio, non è una soluzione).

Precisato questo, vediamo ora come si trovano le (infinite) soluzioni di un sistema indeterminato. Conviene illustrare il procedimento direttamente su alcuni esempi.
Consideriamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Rango di $A$:

$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$ è un minore di ordine 2 non nullo; orlandolo

si ha $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$ (la terza riga è somma delle prime due)

Segue che $rg(A) = 2$.

---

(1) $n$-pla (ennupla): insieme ordinato di $n$ valori.

È facile verificare che anche $rg(C)=2$.
Essendo $rg(A)=rg(C)$, il sistema è compatibile; essendo poi il rango di A (pari a due) minore del numero delle incognite (pari a tre), il sistema è indeterminato.
Si evidenzia nella matrice A un minore di ordine 2 (poiché 2 è il rango di A) non nullo:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4 & 3 \end{matrix} & 2 \end{pmatrix}$$

in esso intervengono 1ª e 2ª riga e 1ª e 2ª colonna

A questo punto si considerano le righe della matrice che non intervengono nella formazione del minore e si eliminano dal sistema le corrispondenti equazioni (in questo caso la terza).
Il sistema diviene:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

Successivamente, nelle equazioni rimanenti, si portano a secondo membro i termini i cui coefficienti non compaiono nel minore: in tal caso, la terza colonna non fa parte del minore di ordine 2, quindi i termini in $x_3$ (i cui coefficienti stanno, appunto, nella terza colonna) si portano a secondo membro.
Per evitare confusione, conviene poi cambiare nome alle incognite a secondo membro (che, come vedremo, giocano il ruolo di parametri); in tal caso si può porre $x_3 = a$.
Dopo queste operazioni, il sistema è diventato:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 2 - a \\ x_1 - x_2 = -a - 1 \end{cases}$$

Questo è un sistema di due equazioni nelle due incognite $x_1$ e $x_2$ e con vettore dei termini noti

$$B' = \begin{pmatrix} 2-a \\ -a-1 \end{pmatrix}$$

i cui elementi, invece di essere dei numeri, sono delle espressioni letterali.

Il sistema si risolve con il metodo di Cramer e le soluzioni ottenute, anziché essere dei numeri, saranno delle espressioni in cui compare la $a$.

Intanto troviamo questa soluzione, poi vediamo come va interpretata.
Con il metodo di Cramer si ha:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2-a & 4 \\ -a-1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-1\cdot(2-a) - 4\cdot(-a-1)}{-7} = \frac{-2 + a + 4a + 1}{-7} = -\frac{5a-1}{7}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2-a \\ 1 & -a-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{3(-a-1) - (2-a)}{-7} = \frac{-3a - 3 - 2 + a}{-7} = \frac{2a+5}{7}$$

Unendo queste due espressioni trovate per $x_1$ e $x_2$ con la sostituzione, fatta prima, $x_3 = a$, otteniamo

$$x_1 = -\frac{5a-1}{7} \qquad x_2 = \frac{2a+5}{7} \qquad x_3 = a$$

che rappresenta, al variare di $a$, l'insieme di tutte le soluzioni del sistema di partenza. Ciò significa che, attribuendo ad $a$ qualsiasi numero reale, la terna di valori che si ottiene è una soluzione del sistema; ad esempio, per $a=0$ si ha
$x_1 = -\frac{1}{7}$, $x_2 = \frac{5}{7}$, $x_3 = 0$ che è una soluzione;
per $a = 1$ si ha $x_1 = \frac{4}{7}$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ che è un'altra soluzione;
per $a = -2$ si ha $x_1 = -\frac{11}{7}$, $x_2 = \frac{1}{7}$, $x_3 = -2$ che è un'ulteriore soluzione.

Le soluzioni sono infinite poiché infiniti sono i valori che si possono attribuire ad $a$.
Poiché la soluzione del sistema dipende, in questo caso, da un solo parametro ($a$), si usa dire che il sistema ammette $\infty^1$ soluzioni (si legge "infinito alla uno soluzioni")(2).
Il senso di questa dicitura sarà chiarito al termine del prossimo esempio, in cui risolveremo un sistema lineare indeterminato che ammette $\infty^2$ soluzioni.

---

(2) il simbolo $\infty$ significa infinito

Risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \\ -6x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 8x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_3 + 5x_4 = -1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 4 \\ -6 & -2 & 2 & -8 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ -6 & -2 & 2 & -8 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcolando il rango di A e C si trova $rg(A) = rg(C) = 2$; di conseguenza il sistema è compatibile ed inoltre, essendo $rg(A) = 2$ e il numero delle incognite 4, è indeterminato.
Poiché $rg(A) = 2$, evidenziamo in A un minore di ordine 2 non nullo:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{3 \quad 1} & -1 & 4 \\ -6 \quad -2 & 2 & -8 \\ \boxed{1 \quad 1} & 2 & -1 \\ 2 \quad 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 \neq 0$$

in esso intervengono 1ª e 3ª riga e 1ª e 2ª colonna

Eliminiamo dal sistema seconda e quarta equazione, poiché 2ª e 4ª riga di A non intervengono nel minore scelto; nelle equazioni rimanenti portiamo a secondo membro i termini in $x_3$ e $x_4$, poiché 3ª e 4ª colonna di A non fanno parte del minore; cambiamo infine nome a $x_3$ e $x_4$ e poniamo $x_3 = a$ e $x_4 = b$. Si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = a - 4b \\ x_1 + x_2 = 1 - 2a - b \end{cases}$$

che, risolto con il metodo di Cramer, fornisce le espressioni di $x_1$ e $x_2$ in funzione di $a$ e $b$.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} a-4b & 1 \\ 1-2a-b & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{a - 4b - 1 + 2a + b}{2} = \frac{3a - 3b - 1}{2}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & a-4b \\ 1 & 1-2a-b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3-6a-3b-a+4b}{2} = \frac{b-7a+3}{2}$$

Unendo queste due espressioni con le sostituzioni $x_3 = a$ e $x_4 = b$ fatte prima, si ha

$$x_1 = \frac{3a-3b-1}{2} \quad ; \quad x_2 = \frac{b-7a+3}{2} \quad ; \quad x_3 = a \quad ; \quad x_4 = b$$

che rappresenta, al variare di a e b, l'insieme di tutte le soluzioni del sistema di partenza. Per ottenere una specifica soluzione (tra le infinite) bisogna ora fissare a e b; ponendo, ad esempio, $a=0$ e $b=0$, si ha:

$$x_1 = -\frac{1}{2} \quad ; \quad x_2 = \frac{3}{2} \quad ; \quad x_3 = 0 \quad ; \quad x_4 = 0$$ che è una soluzione.

Poiché stavolta la dipendenza è da due parametri (a e b) si dice che il sistema ammette $\infty^2$ soluzioni ("infinito alla due"). Vediamo di chiarire meglio che cosa significa. Innanzitutto osserviamo che a e b sono indipendenti, nel senso che possiamo dare ad a qualsiasi valore, indipendentemente da quello dato a b, e viceversa; supponiamo, ad esempio, di assegnare $a=0$: da questa scelta si ottengono infinite soluzioni (tante quanti sono i valori che si possono dare a b); assegnamo ora $a=5$: si hanno altre infinite soluzioni (potendo dare a b infiniti valori).
Per ognuno degli infiniti valori attribuibili ad a, si hanno infiniti valori attribuibili a b, e per ognuno di essi una diversa soluzione del sistema. Le soluzioni sono, in tutto[3]:

$\infty + \infty + \infty + \infty + \infty \dots$ tante volte quanti sono i valori attribuibili ad a, cioè infiniti, e quindi:

$\infty + \infty + \infty + \infty \dots$ infinite volte,

cioè ancora $\infty \cdot \infty = \infty^2$.

---

(3) $\infty$ non rappresenta un numero, ma un simbolo, pertanto, a rigore, le ultime quattro righe della pagina (esclusa questa nota) sono completamente prive di senso; tuttavia credo che rendano bene l'idea, ma, se siete puristi della matematica, vi consiglio di non leggerle!

Dato un sistema di $m$ equazioni in $n$ incognite compatibile, detto $\rho = rg(A)$ (uguale anche a $rg(C)$) abbiamo già osservato che $\rho \leq n$ e che se $\rho = n$ il sistema è determinato, mentre se $\rho < n$ è indeterminato. Più in particolare, aggiungiamo che se $\rho < n$ il sistema è indeterminato ed ammette $\infty^{n-\rho}$ soluzioni. Ad esempio, se il sistema ha 6 incognite e $rg(A) = rg(C) = 2$, allora il sistema stesso ammette $\infty^4$ soluzioni, cioè nell'insieme delle soluzioni ci sarà la dipendenza da 4 parametri.

ESERCIZI PROPOSTI:

Per ognuno dei seguenti sistemi, stabilire se è compatibile e, in caso affermativo, determinare quante soluzioni ammette e risolverlo.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 = 6 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \\ 5x_1 - x_2 = 7 \\ 7x_1 + 3x_2 = 9 \end{cases} ; \quad \begin{cases} -x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - 8x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 2 \\ 8x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 8 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$